

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală a județului Alba, 13 februarie 2015

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE - CLASA a VIII-a

Problema 1. Determinați numerele reale x și y care verifică egalitatea

$$\sqrt{x^2 - 2\sqrt{3}x + 7} + \sqrt{y^2 - 6y + 18} = 5.$$

Soluție. $\sqrt{x^2 - 2\sqrt{3}x + 7} = \sqrt{(x - \sqrt{3})^2 + 2^2} \geq 2$ 2 puncte
 $\sqrt{y^2 - 6y + 18} = \sqrt{(y - 3)^2 + 3^2} \geq 3$ 2 puncte
 $\sqrt{x^2 - 2\sqrt{3}x + 7} + \sqrt{y^2 - 6y + 18} \geq 5$ 2 puncte
 Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = \sqrt{3}$ și $y = 3$ 1 punct

Problema 2. Se dă expresia $E_{(x,k)} = x^2 + (4k + 1)x - 4k - 2$, unde $x \in \mathbb{N}^*$ iar $k \in \mathbb{N}$.

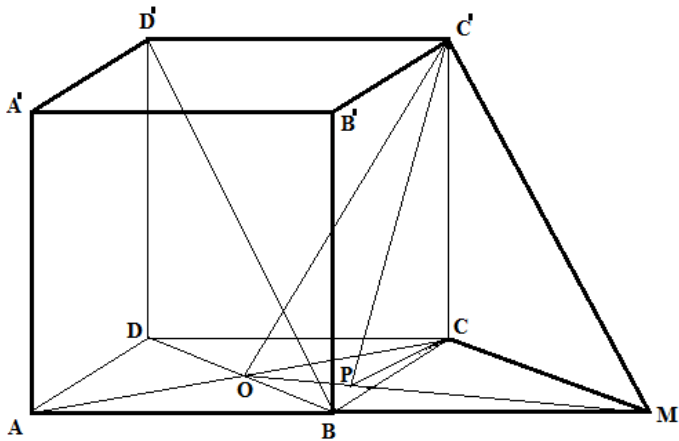
- Arătați că $E_{(x,k)} = (x - 1) \cdot (x + 4k + 2)$, $\forall x \in \mathbb{N}^*$ și $\forall k \in \mathbb{N}$.
- Determinați x din \mathbb{N}^* astfel încât $E_{(x,k)} = 0$.
- Demonstrați că $\frac{x+k}{3k+2} \geq \frac{k+1}{x+3k+1}$, $\forall x \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}$.
- Rezolvați ecuația: $\frac{x}{2} + \frac{x+1}{5} + \frac{x+2}{8} + \dots + \frac{x+33}{101} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+4} + \frac{3}{x+7} + \dots + \frac{34}{x+100}$.

Soluție. a) Calcul $(x - 1) \cdot (x + 4k + 2) = x^2 + (4k + 1)x - 4k - 2 = E_{(x,k)}$ 1 punct
 b) $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ 1 punct
 $x + 4k + 2 = 0$ nu are soluții 1 punct
 c) $\frac{x+k}{3k+2} \geq \frac{k+1}{x+3k+1} \Leftrightarrow (x + k) \cdot (x + 3k + 1) \geq (3k + 2) \cdot (k + 1)$ 1 punct
 $(x + k) \cdot (x + 3k + 1) \geq (3k + 2) \cdot (k + 1) \Leftrightarrow E_{(x,k)} \geq 0$ adevărată 1 punct
 d) Folosirea inegalității c) pentru a demonstra unicitatea soluției 1 punct
 $x = 1$ 1 punct

Problema 3. Se dă cubul $ABCD A' B' C' D'$, de latură a și fie M simetricul punctului A față de punctul B .
 Se notează cu O punctul de intersecție al diagonalelor bazei $ABCD$.

- Determinați, în funcție de a , distanța de la punctul C' la dreapta OM .
- Determinați sinusul unghiului dintre dreptele BD' și $C'O$.

Soluție.

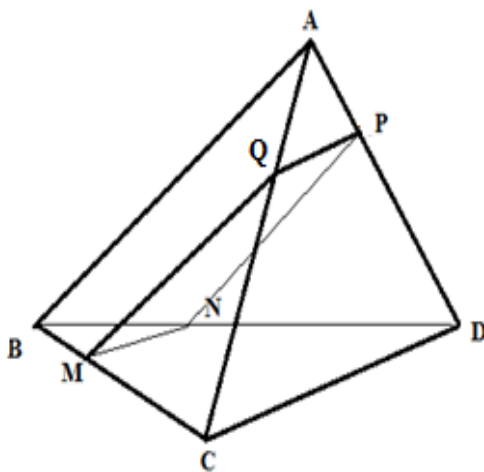


- a) Ducem $CP \perp OM \Rightarrow C'P \perp OM$ 2 puncte
 $\Delta MOC, m(\angle MCO) = 90^\circ \Rightarrow OM = \frac{a\sqrt{10}}{2}$..1 punct
 $CP = \frac{a\sqrt{10}}{5}; C'P = \frac{a\sqrt{35}}{5}$ 1 punct
 b) Unim pe C' cu M .
 $BMC'D'$ paralelogram 1 punct
 $m(\angle BD', C'O) = m(\angle C'O, C'M) = \alpha$ 1 p
 Aplicarea metodei “aria în două moduri” în $\Delta C'OM$
 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$ 1 punct

Problema 4. Se dă tetraedrul $ABCD$, cu muchiile $AB = a, CD = b; a, b \in \mathbb{N}^*, a > b$. Secționăm tetraedrul $ABCD$ cu un plan $(MNPQ)$ paralel cu muchiile AB și CD astfel încât $M \in (BC), N \in (BD), P \in (AD), Q \in (AC)$ și $\frac{MB}{MC} = x$.

- a) Arătați că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram.
 b) Arătați că $MN = \frac{bx}{x+1}$.
 c) Determinați, în funcție de a și b valoarea raportului $x = \frac{MB}{MC}$ astfel încât paralelogramul $MNPQ$ să aibă perimetrul maxim, exprimat printr-un număr întreg.

Soluție.



- a) Deoarece planul $(MNPQ)$ este paralel cu muchiile AB și CD , deducem foarte ușor că $\begin{cases} MN \parallel CD \\ PQ \parallel CD \end{cases}$, de unde $MN \parallel PQ$.
 2 puncte
 Analog avem $\begin{cases} MQ \parallel AB \\ NP \parallel AB \end{cases}$, de unde $MQ \parallel PN$. Rezultă că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram. 1 punct
 b) $\Delta BMN \sim \Delta BCD \Rightarrow \frac{MN}{CD} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow MN = \frac{bx}{x+1}$ 1 punct
 $\Delta CMQ \sim \Delta CBA \Rightarrow \frac{MQ}{AB} = \frac{MC}{BC} \Rightarrow MQ = \frac{a}{x+1}$ 1 punct
 Perimetrul paralelogramului $MNPQ$:
 $\mathcal{P} = \frac{2bx+2a}{x+1} = 2b + \frac{2a-2b}{x+1}$ 1 punct

Deoarece $x > 0$ rezultă $\frac{2a-2b}{x+1} < 2a - 2b$, de unde $\mathcal{P} < 2a$. Cum \mathcal{P} trebuie să fie maxim și exprimat printr-un număr întreg, rezultă $\mathcal{P} = 2a - 1$. Se obține $\frac{2bx+2a}{x+1} = 2a - 1$, iar de aici, prin calcul rezultă
 $x = \frac{1}{2a-2b-1}$ 1 punct